ثانوية بئر أنزران - صفرو -

الثّانية بكالوريا علوم فيزيائية 2

2007 - 2008

إشـــارات حـلــول الامـتـحـان التـجـريـبـي مــاي 2008

الشعبة: علوم تجريبية

المدّة: 3 ساعات

ذ: توفيق بنعمرو

التمرين الأوّل:

1) أ) المميّز: $\Delta = -4$ إذن $d = 2i$ جذر مربّع له و منه الحلاّن هما:
$z_1 = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ و $z_2 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$.

ب) $z_1 = 1-i = [\sqrt{2}\,,\, -\dfrac{\pi}{4}]$ و $z_2 = [\sqrt{2}\,,\, \dfrac{\pi}{4}]$.

2) أ) $\dfrac{z_C-3}{z_A-3} = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{5} = \dfrac{5i}{5} = i = [1, \dfrac{\pi}{2}]$

ب) لدينا $\left|\dfrac{z_C-3}{z_A-3}\right| = 1$ إذن $|z_C-3| = |z_A-3|$ و منه $CI = AI$

لدينا $(\overrightarrow{IA}\,,\,\overrightarrow{IC}) \equiv \arg(\dfrac{z_C-3}{z_A-3}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن IAC متساوي الساقين و قائم الزّاوية في I .

3)
$$t_{2\overrightarrow{IC}}(O) = E \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{OE}$$
$$\Leftrightarrow (z_E - z_O) = 2(z_C - z_I)$$
$$\Leftrightarrow z_E = 2(2-2i-3) = -2-4i$$
.

4)
$$R_{(o,\frac{\pi}{2})}(E) = D \Leftrightarrow z_D - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_O)$$
$$\Leftrightarrow z_D = i(-2-4i)$$
$$\Leftrightarrow z_D - z_O = 4-2i$$
.

مـسـألـة:

الجزء الأوّل:

1) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1-\ln(1+0) = 1$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\ln(1+e^{-x}) = -\infty$.

2) أ)
$$f(x) = 1-\ln(1+e^{-x}) = 1-\ln(\,e^{-x}(e^x+1)\,)$$
$$= 1-\ln(e^{-x})-\ln(e^x+1)$$
$$= 1-(-x)-\ln(e^x+1) = 1+x-\ln(e^x+1)$$

لدينا: $\lim\limits_{-\infty} e^x = 0$ إذن:
$$\lim_{-\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{-\infty} -\ln(e^x+1) = -\ln(1) = 0$$

بالتوفيق

ب) حسب ما سبق: $f(x)-y = f(x)-(x+1) = -\ln(e^x+1)$
$$\forall x\in\mathbb{R} : e^x > 0 \Leftrightarrow e^x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) > \ln(1)$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^x+1) > 0 \Leftrightarrow -\ln(e^x+1) < 0$$
$$\Leftrightarrow f(x)-y < 0$$

إذن C_f يوجد تحت (Δ) على $\mathbb{R}$.

3) $f'(x) = 0-\dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} = \dfrac{1}{e^x+1}$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} : e^x > 0$ إذن $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x) > 0$.

x	$-\infty$ ⟶ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1

4)
$$f(a) = 1-\ln(1+e^{-a}) = 1-\ln(1+e^{\ln(e-1)})$$
$$= 1-\ln(1+e-1) = 1-\ln(e) = 1-1 = 0$$

إذن C_f يقطع محور الأفاصيل في النّقطة $A(a,0)$.

$$f(-a) = 1-\ln(1+e^a) = 1-\ln(1+e^{-\ln(e-1)})$$
$$= 1-\ln(1+\frac{1}{e-1}) = 1-\ln(\frac{e-1+1}{e-1})$$
$$= 1-\ln(\frac{e}{e-1}) = 1-\ln(e)+\ln(e-1) = \ln(e-1) = -a$$

إذن C_f يقطع المستقيم $y=x$ في النّقطة $B(-a,-a)$.

6) f متّصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن تقبل دالة عكسية f^{-1} على:
$J = f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty\ ,1[$.

الجزء الثاني:

1) من أجل $n=0$: $0 \le u_0 = \frac{1}{2} \le 0,6 \approx -a$.

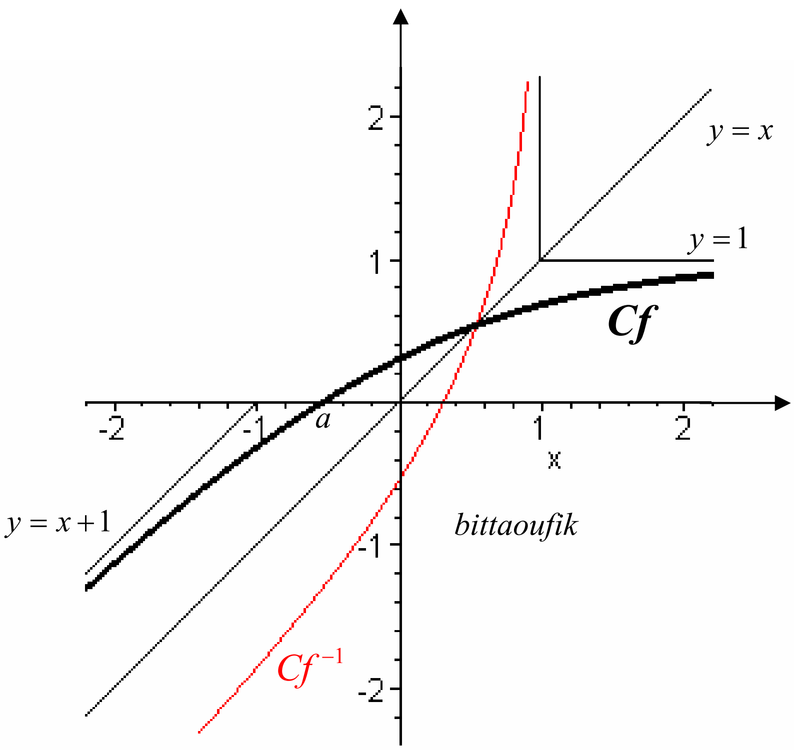
نفترض أنّ $0 \le u_n \le -a$، لدينا f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن
$f(0) \le f(u_n) \le f(-a)$ و حسب السؤال 4) فإن $f(-a) = -a$
إذن $0 \le u_{n+1} \le -a$ و منه $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \le u_n \le -a$.

2) أ)
$$f(x) \ge x \Leftrightarrow x+1-\ln(1+e^x) \ge x$$
$$\Leftrightarrow 1 \ge \ln(1+e^x) \Leftrightarrow e \ge 1+e^x$$
$$\Leftrightarrow e^x \le e-1 \Leftrightarrow x \le \ln(e-1) \Leftrightarrow x \le -a$$

ب) نستعمل التكافؤات المتوالية:
$(u_n)_n$ تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \ge u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \ge u_n$
$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : u_n \le -a$ حسب السؤال السّابق
و هذا صحيح حسب السؤال 1).

3) $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة ب $(-a)$ إذن متقاربة.
f متصلة على $[0,-a]$ و $f([0,-a]) \subset [0,-a]$ و $(u_n)_n$
متقاربة و $\forall n : u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 \in [0,-a]$
إذن $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ يحقّق المعادلة $f(\ell) = \ell$.
$$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell + 1 - \ln(1+e^\ell) = \ell$$
$$\Leftrightarrow 1 = \ln(1+e^\ell) \Leftrightarrow e = 1+e^\ell \Leftrightarrow \ell = \ln(e-1) = -a$$

بالتوفيق



التمرين الثاني:

1) أ) لدينا من المعادلتين:
$\overrightarrow{n_1}(1,0,1)$ منظمية على (P) و $\overrightarrow{n_2}(1,1,-1)$ منظمية على (R)
$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 1+0-1 = 0$ إذن $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$ و بالتالي: $(P) \perp (R)$.

ب) $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$

إذن $\vec{n}(-1,2,1)$ موجّهة ل (Δ) .

نحدّد نقطة مشتركة بين (P) و (R):

نأخذ $z=0$ إذن في معادلة (P): $x=-1$ نعوّضهما في معادلة (R):

إذن $y=2+z-x=3$ و منه $A(-1,3,0)$ مشتركة بين (P) و (R) إذن تنتمي ل (Δ)

و بالتالي تمثيل بارمتري: $(\Delta):\begin{cases} x=-1-t \\ y=3+2t \;;\; t\in\mathbb{R} \\ z=0+t \end{cases}$

2) أ) شعاع الفلكة هو مسافة المركز O عن المستقيم (Δ):

$$R=d(\,O\,,(\Delta)\,)=\frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$$

نحدّد $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}$ فنجد $(3,1,1)$ $\overrightarrow{OA}\wedge\vec{n}$ إذن $\sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}=R$.

ب) $x^2+y^2+z^2=\frac{11}{6}$.

بالتوفيق

ج) نحدّد مسافة O عن المستوى (P):

$$d=d(O\,,(P))=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<R$$

شعاع الدائرة هو: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

نحدّد المركز: ليكن (D) المستقيم المار من O و العمودي على (P)

إذن $\overrightarrow{n_1}$ موجّهة له و منه تمثيله البارمتري: $(D):\begin{cases} x=t \\ y=0 \;;\; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

نعوّضه في معادلة (P) فنجد $t=-\frac{1}{2}$ إذن نقطة التّقاطع:

$c(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$ هي مركز الدائرة.

التمرين الثالث:

1) المعادلة المميّزة: $r^2-4r+13=0$ المميّز: $\Delta=-36$

$d=-6i$ جذر مربّع: الحلاّن: $r=2\pm3i$

حلول المعادلة التفاضلية تكتب على شكل:

$y(x)=e^{2x}(\;\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\;)$.

2) أ) $g(x)=e^{2x}(\;\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)\;)$

$g(0)=0$ إذن $\lambda\cos0+\mu\sin0=0$ و منه $\lambda=0$.

إذن $g(x)=e^{2x}\mu\sin(2x)$.

لدينا: $g^{/}(x)=2e^{2x}\mu\sin(3x)+\mu e^{2x}3\cos(3x)$

$g^{/}(0)=3$ إذن $\mu=1$ و بالتالي: $g(x)=e^{2x}\sin(3x)$.

ب) لدينا $g^{//}(x)-4g^{/}(x)+13g(x)=0$

إذن $g(x)=\frac{4}{13}g^{/}(x)-\frac{1}{13}g^{//}(x)$ و منه:

$$\int_0^{\pi}e^{2x}\sin(3x)\;dx=\int_0^{\pi}g(x)\;dx$$
$$=\frac{4}{13}\int_0^{\pi}g^{/}(x)\;dx-\frac{1}{13}\int_0^{\pi}g^{//}(x)\;dx$$
$$=\frac{4}{13}[g(x)]_0^{\pi}-\frac{1}{13}[g^{/}(x)]_0^{\pi}$$
$$=\frac{4}{13}[g(\pi)-g(0)]-\frac{1}{13}[g^{/}(\pi)-g^{/}(0)]$$
$$=0-\frac{1}{13}[-3e^{2\pi}-3]=\frac{3}{13}[e^{2\pi}+1]$$

ج) مكاملة بالأجزاء:

نضع $u(x)=\cos(3x)$ و $v^{/}(x)=e^{2x}$ إذن:

$u^{/}(x)=-3\sin(3x)$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. و منه:

$$I=\int_0^{\pi}e^{2x}\cos(3x)\;dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^{2x}\cos(3x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\frac{3}{2}e^{2x}\sin(3x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}e^{2\pi}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{3}{13}(e^{2\pi}+1))=-\frac{2}{13}(e^{2\pi}+1)$$

التمرين الرّابع:

1) أ) A : << 4 - 3 - 2 - 1 >> و B : << 5 - 3 - 1 >>

و $A\cap B$: << 3 - 1 >> إذن:

$p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ و $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ و $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

و بالتالي: $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{2}{3}$.

ب) الاختبار يُعاد خمس مرات باستقلالية: $n=5$.

و الحدث B : $p=p(B)=\frac{1}{2}$.

احتمال أن يتحقّق B مرّتين $k=2$ هو:
$C_5^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (1-\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}$.

2) عدد الألوان المسحوبة هو لون أو لونان أو ثلاث ألوان.

بالتوفيق

$\underbrace{2V \; ; \; 3J}_{U}$ نسحب تآنياً كرتين إذن نستعمل عدد التأليفات

$\underbrace{3V \; ; \; 1B}_{U'}$ نسحب بتتابع و دون إحلال إذن نستعمل عدد التّرتيبات

عدد الإمكانيات: $card\Omega = A_4^2 \times C_5^2 = 12 \times 10 = 120$.

$X=1$	($\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{2V}_{U}$)	$p(X=1)=\frac{A_2^3 C_2^2}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$
$X=2$	($\underbrace{1B\,,1V}_{U'}$ و $\underbrace{2V}_{U}$) أو ($\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{2J}_{U}$) أو ($\underbrace{2V}_{U'}$ و $\underbrace{1V,1J}_{U}$)	$p(X=2)=\frac{2A_1^1A_3^1C_2^2+A_3^2C_3^2+A_3^2C_3^1C_2^1}{120}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$
$X=3$	($\underbrace{1B\,,1V}_{U'}$ و $\underbrace{2J}_{U}$) أو ($\underbrace{1B\,,1V}_{U'}$ و $\underbrace{1V,1J}_{U}$)	$p(X=3)=\frac{2A_1^1A_3^1C_3^2+2A_1^1A_3^1C_3^1C_2^1}{120}=\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$