Institution al inbiaat privée | premier devoir de maths | 1sm1 option biof

Exercice1(6points)

On considère les réels $u_0, u_1, \ldots\ldots u_n$.. définis par la relation : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2u_n} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1- En utilisant le raisonnement par récurrence montrez que. $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.

2- Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n < 0$.

3- Montrez que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$:(on pourra utiliser les équivalences successives et la question 1)

4- . En utilisant le raisonnement par récurrence montrez que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$.

Exercice2(2points)

1. Donnez la négation de la proposition suivante

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, , \forall p \in \mathbb{N}: [N \geq p \; et \; p \geq 0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n < \varepsilon|]$.

2. Donner la contraposée de la phrase mathématique suivante

.$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, , \forall p \in \mathbb{N}: [N \geq p \; et \; p \geq 0 \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n < \varepsilon|]$.

exercice3 (4points)

En utilisant les équivalences successives résoudre les équations suivantes

1)$\sqrt{7+2x} = 1+2x$

2)$\sqrt{x^2+2x} \geq 2x+1$

Exercice4 (3points)

Soit $E = \{(x,y) \in IR^2 / \, x^2 - 2y^2 + xy + x + 2y = 0\}$

F=$\{(x,y) \in IR^2 / \, x + 2y = 0\}$.

1. Montrer que E≠ $\emptyset$
2. Montrer que F$\sqsubset E$. est-ce que E$\sqsubset F$?
3. Déterminer G ensemble qui vérifie$E = F \cup G$.

Exercice5 (3points)

Soient m un réel strictement positif et $E = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| < m\}$.

Soit$F = \left\{x \in \mathbb{R} / |x-1| < \frac{3}{2}\right\}$.

1. Montrer que E≠ $\emptyset$.
2. Déterminer les valeurs de m s ils existent tel que E=F.
3. Déterminer les valeurs de m s ils existent tel que E∩F=$\emptyset$.

Exercice6 (2points)

A=$\left\{\frac{-7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, B=$\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C=$\left\{\frac{-3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrer que A=B.
2. A-t-on C=A justifié.

Exercice bonus (2points)

Donner le nombre de diagonales d'un quadrilatère, d'un pentagone, d'un hexagone.

On noted_n, le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets n≥ 4. .

Deux des formules suivantes sont vraies pour n≥ 4Lesquelles ?

(a) $d_{n+1} = d_n$+3 (b) $d_{n+1} = d_n + n - 1$ (c) $d_{n+1} = 2d_n + (-1^n)$

(d) $d_{n+1} = d_n + n - 2$, (e)$d_n = \frac{n^2-3n}{2}$.

Déterminer la première formule à l'aide du graphique et démontrer

La deuxième à l'aide de la récurrence.

Déterminer la première formule à l'aide des graphiques et l'utiliser pour démontrer par récurrence la seconde.

On vérifie graphiquement que le quadrilatère a deux diagonales, le pentagone a 5 diagonales et l'hexagone en a 9.

Seules les formules c) et e) conviennent.

Admettons la formule pour tout entier.

Montrons par récurrence la propriété définie pour tout entier par :

Guesmi.