2 بكالوريا علوم رياضية	تجريبي رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن الختير	دورة أبريل 2017	مديرية الخميسات

مدة الإنجاز : أربع ساعات

التمرين الأول: (3,5 ن)

⇦ لكل x و y من $]0,1[$ ، نضع : $x*y=\dfrac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy}$.

0,5 **1)-** بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $]0,1[$.

2)- لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $f(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$.

0,75 **أ-** بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(]0,1[,*)$ ، و حدد تقابله العكسي f^{-1} .

0,75 **ب-** استنتج بنية $(]0,1[,*)$ ، ينبغي تحديد العنصر المحايد و x' مماثل كل عنصر x من $]0,1[$.

3)- نعتبر المجموعة : $H=\left\{\dfrac{3^n}{2+3^n}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

0,75 ✓ بين أن $(H,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(]0,1[,*)$.

4)- لكل (n,x) من $(\mathbb{N}^*-\{1\})\times]0,1[$ ، نضع : $x^{(n)}=\underbrace{x*x*...*x}_{n\ fois}$.

0,75 ✓ عبر عن $x^{(n)}$ بدلالة n و x ، ثم استنتج مماثل $x^{(n)}$ في $(]0,1[,*)$.

التمرين الثاني: (3,5 ن)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(E):z^2+(1+2i)z+1+7i=0$.

0,5 **1)-** حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $u=-7-24i$.

0,5 **2)-** حدد الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) بحيث : $\mathrm{Re}(z_2)<0$.

0,25 **3)-** تحقق أن : $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}.e^{i.\frac{3\pi}{4}}$.

0,5 **4)-** ليكن θ عمدة ل z_2 . أكتب بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي $v=1+7i$.

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $a=-2+i$ و $b=1-3i$ و ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

0,25 **1)-** حدد $c=aff(C)$ ، حيث $C=r(A)$.

2)- لتكن النقطة D ذات اللحق d بحيث يكون الرباعي $OCDB$ متوازي الأضلاع .

0,75 **أ-** حدد العدد العقدي d ، ثم بين أن : $\overline{(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})}\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

0,75 **ب-** بين أن النقط O و A و B و D متداورة .

التمرين الثالث: (3 ن)

الجزءان I- و II- مستقلان فيما بينهما

I- نضع : $S_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{Z} - \{1\}$.

1)- تحقق أن : $(a-1) \times S_n = a^n - 1$ ، ثم استنتج أن : $(a-1) \wedge a^n = 1$. — 0,5

2)- حل في $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة : $(E): a^n x + (a-1) y = a$. — 0,5

3)- استنتج مجموعة حلول المعادلة : $(F): 10^n x + 2^{n+2} y = 10 \times 2^{n-1}$ في $\mathbb{Z}^2$. — 0,25

II- نعتبر في $\mathbb{N}^* - \{1\}$ ، المعادلة : $(G): 2^n \equiv 1[n]$.

1)- لكل (m,n) من $(\mathbb{N}^*)^2$ ، نضع : $d = m \wedge n$.

✓ بين أن : $(\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\}); \begin{cases} 2^m \equiv 1[p] \\ 2^n \equiv 1[p] \end{cases} \Rightarrow 2^d \equiv 1[p]$. — 0,5

2)- ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ بحيث : $2^n \equiv 1[n]$ و ليكن p <u>أصغر قاسم أولي موجب للعدد</u> n .

أ- بين أن n عدد فردي . — 0,25

ب- بين أن : $(p-1) \wedge n = 1$. — 0,25

ج- بين أن : $2^n \equiv 1[p]$ و $2^{p-1} \equiv 1[p]$. — 0,5

3)- استنتج مما سبق مجموعة حلول المعادلة (G) . — 0,25

التمرين الرابع: (3,75 ن)

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $]1, +\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x \in]1, +\infty[); F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{2-t}}{t-1} dt .$$

1)- أ- بين أن : $(\forall t \in]1, +\infty[); 0 \le (t-1) e^{2-t} \le 1$. — 0,5

ب- بين أن : $(\forall x \in]1, +\infty[); 0 \le F(x) \le \dfrac{1}{x(x-1)}$. — 0,25

ج- استنتج النهاية : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ ، ثم أعط تأويلها الهندسي المناسب . — 0,5

2)- أ- بين أن : $(\forall x \in]1, +\infty[); F(x) \ge e^{1-x} . \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. — 0,5

ب- استنتج النهاية : $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ ، ثم أعط تأويلها الهندسي المناسب . — 0,5

3)- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ و أن : — 0,75

$$(\forall x \in]1, +\infty[); F'(x) = \frac{e^{1-x}}{x(1-x)} . [(e-1)x + 1] .$$

4)- ضع جدول تغيرات F ، ثم ارسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم . — 0,75

التمرين الخامس: (6,25 ن)

الجزء الأول:

⇦ لتكن g الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\left(\forall t\in[0,+\infty[\right); g(t)=\ln\left(1+\sqrt{t}\right)-\sqrt{t} .$$

1)- بين أن g متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : — 0,75

$$\left(\forall t\in]0,+\infty[\right); g'(t)=\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} .$$

2)- بين أن : $\left(\forall t\in]0,+\infty[\right)\left(\exists c\in]0,t^2[\right); \dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\dfrac{-1}{2\left(1+\sqrt{c}\right)}$. — 0,5

3)- استنتج أن : $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\dfrac{-1}{2}$. — 0,25

الجزء الثاني:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(0)=0 \text{ و } \left(\forall x\in]0,+\infty[\right); f(x)=x^2.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) .$$

1)- بين أن f متصلة و قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر . — 0,5

2)- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (استعمل نتيجة الجزء الأول **3)-**) . — 0,75

3)- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : — 0,5

$$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); f'(x)=x\left(2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right) .$$

ب- بين أن : $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); 2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}>0$ ، ثم ضع جدول تغيرات f . — 0,75

4)- ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. — 0,5

5)- نضع : $I(\lambda)=\displaystyle\int_\lambda^1\left(f(x)-x+\frac{1}{2}\right)dx$ ، حيث $\lambda\in]0,1[$.

✓ عبر عن $I(\lambda)$ بدلالة λ ، ثم احسب النهاية $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}I(\lambda)$ وأعط تأويلها الهندسي . — 0,75

6)- نضع : $S_n=\dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right); \dfrac{1}{n}.f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\,dt\le S_n\le\frac{1}{n}.f(1)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\,dt$. — 0,5

ب- استنتج أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ متقاربة محددا نهايتها . — 0,5