

التمرين ٢

نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_n = \frac{(-1)^n + n^2}{n^2 + \sin \sqrt{n+3}}$

- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n^2-1}{n^2+4} \leq U_n \leq \frac{n^2+1}{n^2+2}$
- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين ٣

نعتبر المتتالية:
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + U_n}{U_n^2 + 1} \end{cases}$$

- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: U_n > 1$
- أدرس رتبة U_n
- استنتج أن U_n متقاربة.
- أ- بين أن:
ب. استنتج أن: $0 < U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$
ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين ٤

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي:

$u_0 = 1$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$

$$t_n = 3u_n + 8v_n \quad \text{و}$$

- أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n .
- أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة.
- أثبت أن المتتالية (u_n) تناقصية على \mathbb{N} . و أن المتتالية (v_n) تزايدية على \mathbb{N} .
- عين u_n و v_n بدلالة n .
- استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

نشاط تذكيري

A (1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحيث:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, \quad \mathbb{N} \text{، ولكل } n \text{، } u_0 = -1$$

$$v_n = \frac{2}{1-u_n}, \quad \mathbb{N} \text{ لكل } n \text{ من}$$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددًا أساسها وحدها الأول.

ب- احسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n .

ت- نضع لكل n من \mathbb{N}^* : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

احسب S_n بدلالة n .

(2) لتكن (w_n) متتالية حسابية بحيث:

$$w_5 = -13 \quad \text{و} \quad w_2 = 41$$

احسب w_{20} .

B

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحيث لكل n من \mathbb{N} :

$$v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية محددًا أساسها

2- لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q بحيث: $8u_7 = u_4$

أ- حدد الأساس q .

ب- حدد الحد الأول u_0 علما أن $u_3 = \frac{3}{8}$.

ت- نعتبر المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\text{بين أن: } S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

التمرين ١

حدد نهاية المتتالية (u_n) في الحالات التالية:

$$u_n = \frac{3^n}{2 \times 3^n + 1} \quad u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$$

$$u_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{2n+1}}$$

$$u_n = \sin\left(\frac{3\pi n + 2}{2n + \pi}\right) \quad u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n+1} \quad u_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2}{n+3}}$$

$$u_n = n - \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad u_n = \frac{3^n}{5^n} \quad u_n = \cos\left(\frac{-3\pi n + 2}{n + 2\pi}\right)$$

$$u_n = (-2)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad u_n = 2n + 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التمرين ٩

I.

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-1; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x^3 \sqrt{1+x}$$

(1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في

$$x_0 = -1$$

(2) أ- بين أن لكل x من $[-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{4x+3}{3^3 \sqrt{(1+x)^3}}$$

ب- ادرس تغيرات الدالة f .

ث- بين أن لكل x من $[-1; +\infty[$: $f(x) \geq x$

(3) ليكن (C_f) منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى

معلم متعامد ممنظم $(0; \bar{1}; \bar{J})$

أ- اكتب معادلة المماس ل (C_f) في النقطة $O(0; 0)$

ب- أنشئ المنحنى (C_f) ومماسه في النقطة O

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 \in [-1; +\infty[\setminus \{0\} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

(2) نفترض أن $-1 \leq u_0 < 0$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 0$

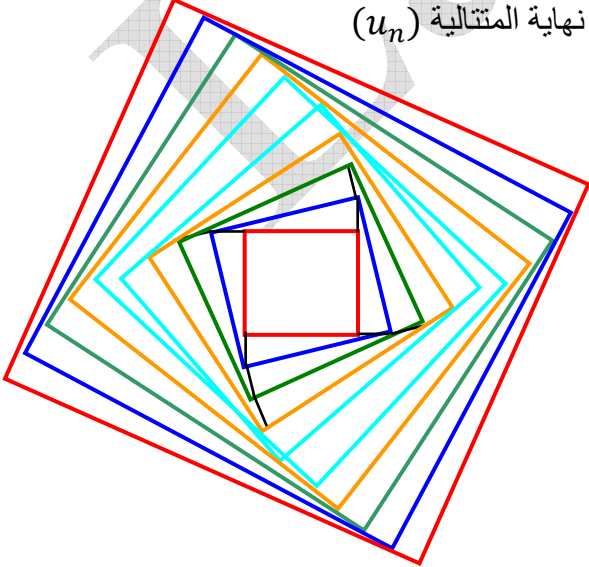
ب- بين أن (u_n) متتالية متقاربة وحدد نهايتها.

(3) نفترض أن $u_0 > 0$

ونضع $k = u_0(\sqrt[3]{1+u_0} - 1)$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq k$

حدد نهاية المتتالية (u_n)



التمرين ٥

نعتبر المتتالية : $U_n = \frac{\cos(3n)}{\sqrt{n}}$

1. بين أن : $|\forall n > 0| U_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين ٦

(1) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

على $I =]6; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{5} \times \frac{x^2 + 3x + 6}{x - 2}$$

بين أن الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على I واستنتج أن

$$f(I) = I$$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 6$

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعاً.

ت- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين ٧

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{\sin(n)}{n} + \frac{\cos(n)}{n^2}$$

(1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - 1| \leq \frac{2}{n}$

(2) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين ٨

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$$

(1) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

(2) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$